

# Randbedingungen für aktive Konturen zur Bildsegmentierung

Dipl.-Math.(FH) Stefan Wenhardt, Prof. Dr. Dietwald Schuster

24. Februar 2004

## 1 Einleitung

Die Bildsegmentierung ist heute noch immer ein Problem in der Bildverarbeitung das nicht in vollster Allgemeinheit gelöst ist. Das Ziel der Segmentierung ist „zusammengehörende Bereiche“ in einem Bild zu finden, um Objekte vom Hintergrund zu trennen.

Dieser Artikel untersucht das erstmalig in [Kas87] vorgeschlagene Modell für die Segmentierung mittels aktiver Konturen. Die Segmentierung wird dabei mit Hilfe eines physikalischen Modells realisiert. Dieses Modell führt virtuelle Energien ein. Dabei markiert eine Kurve mit minimaler Energie die Kontur eines Objekts im Bild. In der Originalarbeit, noch in den Arbeiten zur Ergänzung [Coh92, Coh93, Bla00, Ley93] wird dabei das Problem der Randbedingungen analysiert. Dabei werden wir zeigen, dass bei unzulässigen Randbedingungen scheinbar Widersprüche entstehen können. Deswegen erfolgt eine Herleitung, welche Arten von Randbedingungen mit der Theorie konform gehen.

## 2 Das Modell der aktiven Konturen

Eine aktive Kontur ist eine zweidimensionale Kurve  $k(x(s), y(s))$ , die unter dem Einfluss verschiedener virtueller Kräfte steht. Gesucht ist die Lage in der die Gesamtenergie ein lokales Minimum annimmt. Die Gesamtenergie hat die Form

$$E_{ges} = \int_a^b e_{snake}(k) ds = \int_a^b \frac{\alpha(s)}{2} (x'(s)^2 + y'(s)^2) + \frac{\beta(s)}{2} (x''(s)^2 + y''(s)^2) + e_p(x(s), y(s)). \quad (1)$$

Die Energie  $E_{ges}$  hat dabei einen bestimmten Aufbau, sie besteht aus Dehnungs-, Biege- und Bildenergie, die nun kurz erläutert werden.

Dehnungs- und Biegeenergie werden als innere oder interne Energie bezeichnet. Sie sind umso größer, je stärker die Kurve gedehnt bzw. verbogen ist.

Die Dehnungsenergie  $E_d$  und die Biegeenergie  $E_b$  wird folgendermaßen definiert:

$$E_{intern} := \underbrace{\int_a^b \frac{\alpha(s)}{2} [x'(s)^2 + y'(s)^2] ds}_{E_d} + \underbrace{\int_a^b \frac{\beta(s)}{2} [x''(s)^2 + y''(s)^2] ds}_{E_b} \quad (2)$$

Die Dehnungsenergie hängt im wesentlichen von der ersten Ableitung der Kurve ab, die Biegeenergie von der zweiten. Die Parameterfunktionen  $\alpha(s)$  und  $\beta(s)$  gewichten die Komponenten.

Die Bildenergie besteht aus einem Potential, das aus den Bildmerkmalen bestimmt wird. Für die Festlegung des Potentials aus dem Bild gibt es unterschiedliche, problemabhängige Definitionen. Exemplarisch sei hier ein Potential für die Detektion von Linien und Kanten angegeben:

$$e_{p,\text{Linien}} = -I(x, y) \quad e_{p,\text{Kanten}} = -\|\nabla I(x, y)\| \quad (3)$$

Die aktive Kontur kann als ein idealisiertes Band mit physikalischen Eigenschaften angesehen werden. Sie zieht sich zusammen wie ein Gummiband (Dehnungsenergie), verhält sich wie ein elastischer Stab (Biegeenergie) und besitzt ein Eigengewicht, durch das sie in die Täler der Potentialfläche gezogen wird. Das Band kommt dort zum liegen, wo seine Gesamtenergie ein (lokales) Minimum annimmt. Eine solche Lage existiert immer und ist bezüglich des Modells zur Segmentierung optimal. Die Segmentierung mit aktiven Konturen bedeutet also die Suche nach einer Minimalkurve für das Funktional (1).

### 3 Randbedingungen für aktive Konturen

#### 3.1 Beispiel für nichtkonforme Zusatzbedingungen

Im Beispiel wird gezeigt, dass unzulässige Bedingungen zu Widersprüchen führen.

Es wird das einfache Potential  $e_p = x^2 + y^2$  verwendet. Darüber hinaus soll  $\alpha$  und  $\beta$  nicht von  $s$  abhängen. Damit lauten die Euler-Gleichungen gemäß (16):

$$\begin{aligned} -\alpha x''(s) + \beta x''''(s) + 2x(s) &= 0 \\ -\alpha y''(s) + \beta y''''(s) + 2y(s) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Es ergeben sich also zwei entkoppelte, gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichungen 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese können analytisch gelöst werden. Sind die Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  alle verschieden, so hat die Lösung die Form

$$\begin{aligned} x(s) &= c_1 e^{\lambda_1 s} + c_2 e^{\lambda_2 s} + c_3 e^{\lambda_3 s} + c_4 e^{\lambda_4 s}, \\ y(s) &= d_1 e^{\lambda_1 s} + d_2 e^{\lambda_2 s} + d_3 e^{\lambda_3 s} + d_4 e^{\lambda_4 s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Unbekannt sind noch die Konstanten  $c_1, \dots, c_4, d_1, \dots, d_4$ . Für ihre Bestimmung kann man prinzipiell, losgelöst vom ursprünglichen Problem, verschiedene Bedingungen festlegen. In unserem Beispiel soll gelten:

$$\begin{aligned} x(0) = 1, \quad x(1) = 1, \quad x(135/360) = -1/\sqrt{2}, \quad x(225/360) = 1/\sqrt{2} \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y(135/360) = 1/\sqrt{2}, \quad y(225/360) = -1/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Als eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems (4) ergibt sich für die Parameter  $\alpha = \beta = 1/100$  eine Kurve  $k_3$  deren Verlauf in Abb. 1 zu sehen ist. Die Kurve erfüllt die

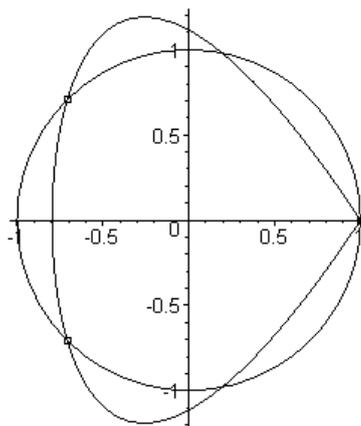


Abbildung 1: Die Lösungskurve der Euler-Gleichungen unter den Zusatzbedingungen und zum Vergleich der Einheitskreis

Euler-Gleichungen und die Zusatzbedingungen. Sie ist aber nicht die Kurve mit kleinster Gesamtenergie, denn im Vergleich mit dem Einheitskreis  $k_k = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ , der ebenfalls (6) erfüllt, gilt:  $E_{ges}(k_3) \approx 13,17$  und  $E_{ges}(k_k) \approx 8,99$ . Die Kurve  $k_3$  ist somit nicht die mit kleinster Gesamtenergie sein. Aus den physikalischen Überlegungen folgt aber, dass eine solche existieren muss. Und existiert sie, so erfüllt sie auch die Euler-Gleichungen. Es gibt aber mit diesen Bedingungen nur eine Kurve, die die Euler-Gleichungen erfüllt, nämlich  $k_3$  und diese ist keine Minimalkurve. Es ergibt sich ein scheinbarer Widerspruch.

### 3.2 Notwendige Bedingungen für periodische Kurven

Wie das Beispiel zeigt sind Zusatzbedingungen nicht beliebig wählbar. Ziel ist es notwendige Bedingungen inklusive konformer Zusatzbedingungen herzuleiten. Zunächst soll hier auf periodische Kurven eingegangen werden, da diese für die Anwendung in der Bildverarbeitung die größere Bedeutung haben. Später werden Bedingungen für nichtperiodische Kurven abgeleitet.

Zunächst einige Konventionen: das Parameterintervall für die Kurve  $k(s)$  sei  $[a, b]$  und es sei die Periode  $T := b - a$ ,  $C_4[a, b]$  sei die Menge der auf  $[a, b]$  4 mal stetig differenzierbarer Funktionen. Außerdem gelte

$$P(T) := \{w \in C_4[a, b] : w, w' \text{ werden außerhalb } [a, b] \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } T\}.$$

Die Kurve soll periodisch sein und einen glatten Übergang am Rand haben, d. h.

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b), \quad y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

Gegeben sei nun die Variationsaufgabe

$$I(x(s), y(s)) = \int_a^b F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), x''(s), y''(s)) ds \rightarrow \min. \quad (7)$$

Dabei sei  $F$  4 mal stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} x \in D_1 &= \{w \in P(T) \text{ und evtl. weiteren Randbedingungen für die } x\text{-Komponente}\} \\ y \in D_2 &= \{w \in P(T) \text{ und evtl. weiteren Randbedingungen für die } y\text{-Komponente}\}. \end{aligned}$$

Man bildet nun eine Hilfsfunktion  $\Phi(\epsilon_1, \epsilon_2)$  mit

$$\Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b F(x_0 + \epsilon_1 v_1, y_0 + \epsilon_2 v_2, x'_0 + \epsilon_1 v'_1, y'_0 + \epsilon_2 v'_2, x''_0 + \epsilon_1 v''_1, y''_0 + \epsilon_2 v''_2) ds \quad (8)$$

Sind  $x_0 \in D_1, y_0 \in D_2$  Minimalkurven, so müssen die partiellen Ableitungen nach  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  der Hilfsfunktion  $\Phi$  an der Stelle  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$  für alle möglichen  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  verschwinden. Dabei ist  $V_1$  und  $V_2$  so zu wählen, dass gilt  $\forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R} : \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 : x = x_0 + \epsilon_1 v_1 \in D_1 \wedge y = y_0 + \epsilon_2 v_2 \in D_2$ . Die partielle Ableitung von  $\Phi$  an der Stelle  $(0, 0)$  lautet für  $\epsilon_1$  dieses Abschnitts<sup>1</sup> nach partieller Integration einiger Summanden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_1} \Big|_{(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)} &= \int_a^b \left[ F_x - \frac{d}{ds} F_{x'} + \frac{d^2}{ds^2} F_{x''} \right] \cdot v_1 ds + \\ &\quad \left[ F_{x'} v_1 - \left( \frac{d}{ds} F_{x'} \right) \cdot v_1 + F_{x''} \frac{d}{ds} v_1 \right]_a^b \end{aligned} \quad (9)$$

Dieser Ausdruck muss für alle  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  gleich Null werden, also insbesondere auch für die  $v_1$  mit

$$v_1(a) = v_1(b) = v'_1(a) = v'_1(b) = 0. \quad (10)$$

So ist der zweite Teil von (9) automatisch erfüllt. Aus dem ersten Teil ergeben sich mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung die Euler-Gleichung als notwendige Bedingung für eine Minimalkurve:

$$F_x - \frac{d}{ds} F_{x'} + \frac{d^2}{ds^2} F_{x''} = 0 \quad (11)$$

Zusätzlich muss natürlich noch der zweite Teil für all jene Variationen  $v_1$  gelten, falls (10) nicht gilt:

$$\left[ F_{x'} v_1 - \frac{d}{ds} F_{x'} \cdot v_1 + F_{x''} \frac{d}{ds} v_1 \right]_a^b = 0 \quad (12)$$

Es müssen also stets die Euler-Gleichungen erfüllt sein und unabhängig davon der 2. Teil von (9).

### Satz 1

Die Werte für  $x(s), y(s), x'(s), y'(s)$  sind am Rand des Parameterintervalls  $[a, b]$  bekannt. Gegeben ist dann das Variationsproblem (7) auf der Menge der zulässigen Konkurrenzfunktionen und der Menge der zulässigen Variationen

$$\begin{aligned} x(s) \in D_1 &= \{w \in P(T) : w(a) = w(b) = x_p, w'(a) = w'(b) = x'_p\} \\ y(s) \in D_2 &= \{w \in P(T) : w(a) = w(b) = y_p, w'(a) = w'(b) = y'_p\} \\ V_1 = V_2 &= \{w \in P(T) : w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0\}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Alle folgenden Überlegungen lassen sich analog für  $\epsilon_2$  bzw.  $y$  durchführen und werden deswegen nicht explizit aufgeführt

Nimmt das Funktional  $I(x(s), y(s))$  für die Funktionen  $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$  ein lokales Minimum an, so sind die Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} F_x - \frac{d}{ds} F_{x'} + \frac{d^2}{ds^2} F_{x''} &= 0 \\ F_y - \frac{d}{ds} F_{y'} + \frac{d^2}{ds^2} F_{y''} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

für  $x_0, y_0$  erfüllt.

Beweis: Euler-Gleichungen klar ; der zweite Teil (12) von (9) ist automatisch erfüllt.

### Satz 2

Die Werte für  $x(s), y(s)$  sind am Rand des Parameterintervalls  $[a, b]$  bekannt. Gegeben ist dann das Variationsproblem (7) auf der Menge der zulässigen Konkurrenzfunktionen und der Menge der zulässigen Variationen

$$\begin{aligned} x(s) \in D_1 &= \{w \in P(T) : w(a) = w(b) = x_p\} \\ y(s) \in D_2 &= \{w \in P(T) : w(a) = w(b) = y_p\} \\ V_1 = V_2 &= \{w \in P(T) : w(a) = w(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Nimmt das Funktional aus (7) für die Funktionen  $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$  ein lokales Minimum an, so erfüllen sie die Euler-Gleichungen (13). Zusätzlich müssen aber noch zwei weitere Randbedingungen erfüllt sein, die hier als 1. natürlich periodische Randbedingungen bezeichnet werden:

$$F_{x''} \big|_{s=b} = F_{x''} \big|_{s=a} \quad F_{y''} \big|_{s=b} = F_{y''} \big|_{s=a}$$

Beweis (für  $x(s) - y(s)$  analog): Euler-Gleichungen klar; da  $v_1 \in V_1$  ist vereinfacht sich (12) zu:

$$[F_{x''} v_1']_a^b = 0 \quad (14)$$

### Satz 3

Die Werte für  $x(s), y(s)$  sind am Rand des Parameterintervalls  $[a, b]$  nicht bekannt. Gegeben ist dann das Variationsproblem (7) auf der Menge der zulässigen Konkurrenzfunktionen und der Menge der zulässigen Variationen

$$x(s) \in D_1 = P(T), \quad y(s) \in D_2 = P(T) \quad V_1 = V_2 = P(T) \quad (15)$$

Dann gilt: nimmt das Funktional  $I(x(s), y(s))$  für die Funktionen  $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$  ein lokales Minimum an, so sind die Euler-Gleichungen (13) und die 1. natürlich periodischen Randbedingungen (14) erfüllt. Zusätzlich müssen noch zwei weitere Randbedingungen erfüllt sein, die 2. natürlich periodische Randbedingungen:

$$\left[ F_{x'} - \frac{d}{ds} F_{x''} \right]_{s=b} = \left[ F_{x'} - \frac{d}{ds} F_{x''} \right]_{s=a}, \quad \left[ F_{y'} - \frac{d}{ds} F_{y''} \right]_{s=b} = \left[ F_{y'} - \frac{d}{ds} F_{y''} \right]_{s=a}.$$

Beweis (für  $x(s) - y(s)$  analog): Euler-Gleichung klar und 1. natürlich periodische Randbedingung folgt aus Satz 2. Weiter muss die Bedingung (12) aber auch für alle  $v_1'(a) = v_1'(b) = 0, \quad v_1(a) = v_1(b) \neq 0$  gelten.

### 3.3 Berechnung der notwendigen Bedingungen für aktive Konturen

Da  $F$  bei der Bildsegmentierung die spezielle Gestalt (1) besitzt, können die notwendigen Bedingungen explizit berechnet werden. Für die Euler-Gleichungen gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\alpha(s)x'(s) + \frac{d^2}{ds^2}\beta(s)x''(s) + \frac{\partial e_p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{d}{ds}\alpha(s)y'(s) + \frac{d^2}{ds^2}\beta(s)y''(s) + \frac{\partial e_p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Für die 1. natürlich periodischen Randbedingungen gelten:

$$x''(a) = x''(b) \quad y''(a) = y''(b) \quad (17)$$

Gilt für die Parameterfunktionen  $\alpha(a) = \alpha(b)$ ,  $\beta(a) = \beta(b)$ ,  $\beta'(a) = \beta'(b)$ , so lauten die 2. natürlich periodischen Randbedingungen:

$$x'''(a) = x'''(b) \quad y'''(a) = y'''(b). \quad (18)$$

Aus den Sätzen 1 bis 3 ergeben sich Konsequenzen für die Bildsegmentierung mit aktiven Konturen. Offensichtlich kann die Lösung der Euler-Gleichungen, die zunächst noch unbekannte Parameter enthält, nicht durch beliebige Zusatzbedingungen eindeutig gemacht werden. Vielmehr dürfen nur spezielle Randbedingungen verwendet werden. Dabei gibt es die Möglichkeiten Funktionswerte am Rand des Parameterintervalls und/oder Ableitungswerte vorzuschreiben. Sind keine Informationen über das Verhalten am Rand bekannt, müssen stattdessen die natürliche Randbedingungen erfüllt sein, damit eine notwendige Bedingung für eine Minimalkurve entsteht.

## Literatur

- [Bla00] A. Blake, M. Isard: *Active Contours*, Springer-Verlag, 2. Ausg., 2000.
- [Coh92] L. Cohen, I. Cohen: *Deformable Models for 3D Medical Images using Finite Elements and Ballons*, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992.
- [Coh93] L. Cohen, I. Cohen: *Finite-Element Methods for Active Contour Models and Ballons for 2D and 3D Images*, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993.
- [Kas87] M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos: *Snakes: Active Contour Models*, *International Journal on Computer Vision 1*, 1987.
- [Ley93] F. Leymarie, M. Martin: *Deformable Objects in the Plane Using an Active Contour Model*, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Bd. 15, Nr. 6, 1993.