Theorie-Übungen zu WTBV, WS 2017/18

Aufgabe 1: Zwei Versionen des Lemmas von Riemann-Lebesgue

Das *Riemann-Lebesgue Lemma* (RLL) ist eine Aussage über die Fourierkoeffizienten einer über einem endlichen Intervall definierten Funktion $f(t)$. (Die Fortsetzung zu einer auf der reellen Achse definierten periodischen Funktion tut weiter nichts zur Sache.)
RLL besagt, dass die Fourierkoeffizienten von $f(t)$ mit steigender Frequenz gegen 0 konvergieren. Hier sind zwei spezielle Fälle dieser allgemeinen Aussage.

1. Ist $f(t)$ eine auf dem endlichen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion, dann gilt

$$(*) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(t)\, \cos(kt)\, dt = 0 \;\text{ and }\; \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(t)\, \sin(kt)\, dt = 0.$$

   Erklären Sie anschaulich (!), warum diese Aussage $(*)$ korrekt ist.

2. Ist $g(t)$ eine Treppenfunktion auf dem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, also $g(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j\, \chi_{I_j}(t)$, mit $a_j \in \mathbb{C}$, wobei die I_j Intervalle $\subseteq [a, b]$ sind, so git $(*)$ ebenfalls.
   Beweisen Sie dies mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Aufgabe 2: Ein Experiment mit den Haar-Waveletfunktionen

Es bezeiche $\psi(t) = \mathbf{1}_{[0,1/2)}(t) - \mathbf{1}_{[1/2,1)}(t)$ die Haar-Waveletfunktion. Berechnen Sie die Haar-Waveletkoeffizienten

$$d_{j,k} = \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \psi_{j,k}(t)\, dt \qquad (j, k \in \mathbb{Z})$$

für die Box-Funktion $b(t) = \mathbf{1}_{[0,1)}(t)$ (als eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion).

1. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung gilt:

$$(*) \qquad b(t) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}(t).$$

   Hinweis: Klären Sie zunächst, für welche $j, k \in \mathbb{Z}$ die Aussage $d_{j,k} \neq 0$ gilt?

   Unterscheiden Sie für den Nachweis von $(*)$ die Fälle
   (i) $t < 0$, (ii) $0 \le t < 1$, sowie (iii) $2^{k-1} \le t < 2^k$ für $k \ge 1$.
   Erinnern Sie sich an die Tatsache $\sum_{k\ge 0} 2^{-k} = 2$ (Summe einer geometrischen Reihe).

2. Jetzt zu dem Experiment: Integrieren Sie beide Seiten von $(*)$ über $\mathbb{R}$.

   - Linke Seite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(t)\, dt = \int_0^1 1\, dt = 1$$

   - Für die rechte Seite, benutzen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0.$$

Daraus ergibt sich für alle $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)\, dt = 0$$

- Aus $(*)$ folgt also

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \cdot 0 = 0,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist! An welcher Stelle versteckt sich eine falsche Argumentation?

Aufgabe 3: Das Gibbs-Phänomen quantitativ

Hier soll das Gibbs-Phänomen in einem speziellen Fall quantitativ untersucht werden. Dazu wird die folgende (2π)-periodische Funktion betrachtet:

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{für } 0 \leq t \leq \pi, \\ -\pi - t & \text{für } -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(t)$ die folgende Fourierreihe hat:

$$F(t) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

(b) Die Differenz zwischen der Funktion $f(t)$ und der Approximation bestehend aus den ersten N Termen der Reihe $F(t)$, betrachtet über dem Intervall $0 \leq t \leq \pi$, ist also

$$g_N(t) = 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n} - (\pi - t).$$

Plotten Sie diese Funktion für verschiedene Werte von N in der Nähe von $t = 0$ und beobachten Sie das Gibbs-Phänomen.

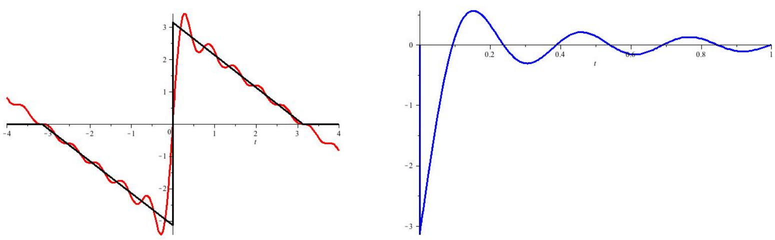

Abbildung 1: Plot von $f(t)$ und der Approximation mit 10 Terms (links), sowie $g_{20}(t)$ (rechts)

(c) Bestimmen Sie nun die Position θ_N des ersten Maximums von $g_N(t)$ rechts von $t = 0$, sowie die Höhe dieses Maximums.

Zeigen Sie, dass[1]

$$\frac{d}{dt}\, g_N(t) = \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

gilt und bestimmen Sie damit θ_N.

(d) Beweisen Sie nun

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(\frac{t}{2})}\, dt - \pi.$$

(e) Lassen Sie nun N wachsen und folgern Sie

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\theta_N) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt - \pi.$$

(f) Berechnen Sie den numerischen Wert

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

und somit das Maximum von $g_N(t)$.

[1]Hinweis: benutzen Sie

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin(\frac{t}{2})} \quad (|t| \le \pi),$$

was man aus der geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{N} e^{itn}$ herleiten kann.